

28.02.2019

Καρτεσιανό μοντέλο (ή μοντέλο D. Hilbert)

Μοντέλο για τη σφαιρομετρία: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

(μοντέλο για την επιπεδομετρία: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$)

• Τα σημεία είναι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$

ο $\mathbb{R}^3$ έχει δομή διανυσματικού χώρου (υπεράνω του $\mathbb{R}$) με

πράξεις: $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$

$$(x, y) \mapsto x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$\circ: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

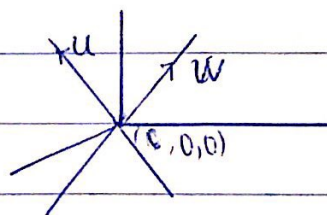
ο $\mathbb{R}^3$ είναι δ.χ. με $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Η συνήθως βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

η $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$\langle u \rangle = \{ \lambda u / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

"
span{u}



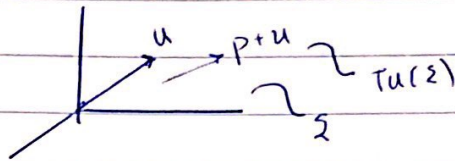
$w \neq 0$

► Παράλληλες μεταφορές

Ορισμός: καλούμε παράλληλη μεταφορά του $\mathbb{R}^3$ κατά $u = (u_1, u_2, u_3)$ την απεικόνιση $T_u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T_u(p) = p + u \quad p \in \mathbb{R}^3$$

$$T_u(0) = u$$



Παρατήρηση: T_u δραμική $\Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow T_u = I \cdot l$

Ορισμός: καλούμε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $p \in \mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλη προς το $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ το σύνολο

$$l_{p,u} = T_u(\text{span}\{u\}) \text{ οι ευθείες είναι σύνολα της μορφής } l_{p,u} = \{p + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Έλεγχος του αξιωματικού συνεκτικής θέσης: Δίνονται τα σημεία $p_1 = (x_1, y_1, z_1), p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ με $p_1 \neq p_2$. ~~Υπάρχει ευθεία που διέρχεται από τα p_1, p_2 .~~

(i) Υπάρχει ευθεία που διέρχεται από τα p_1, p_2 .

Θεωρώ $v = p_2 - p_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq (0, 0, 0)$ και την ευθεία

$$l_{p_1, u} = \{p_1 + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{p_1 + \lambda(p_2 - p_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Για $\lambda = 0$, έχω ότι $p_1 \in l_{p_1, u}$

Για $\lambda = 1$, έχω ότι $p_2 \in l_{p_1, u}$

Μοναδικότητα: Έστω $l_{p,w}$ ευθεία η οποία διέρχεται από τα p_1, p_2

$$l_{p,w} = \{p + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad w \neq 0$$

$$p_1 \in l_{p,w} \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}: p_1 = p + \lambda_1 w$$

$$p_2 \in l_{p,w} \Rightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}: p_2 = p + \lambda_2 w$$

$$p_2 - p_1 = \lambda_2 w - \lambda_1 w \Leftrightarrow u = (\lambda_2 - \lambda_1)w \Rightarrow \text{span}\{u\} = \text{span}\{w\} \\ \Rightarrow l_{p,u} = l_{p,w}$$

→ ορίζεται μόνο στη στερεομετρία

Ορισμός: καλούμε επίπεδο το οποίο διέρχεται από σημείο $p \in \mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλο προς τα δρασμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $u, w \in \mathbb{R}^3$ το σύνολο:

$$\Pi_{p,u,w} = \{p + \lambda u + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \Rightarrow p + \text{span}\{u, w\}$$

Παραλληλές μεταφορές:

$$T_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_v(p) = p + v$$

$$v=0 \Leftrightarrow T_0 = Id$$

$$T_v \circ T_w = T_w \circ T_v \quad \left\{ \begin{array}{l} T_v \circ T_w(p) = T_v(T_w(p)) = T_v(p+w) = p+w+v \\ = T_{v+w}(p) \end{array} \right.$$

για $w = -v$

$$T_v \circ T_{-v} = Id = T_{-v} \circ T_v$$

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow A$$

$$f \circ g = Id_B, \quad g \circ f = Id_A$$

$$\Rightarrow T_v \text{ αντιστρέφεται με } T_v^{-1} = T_{-v}$$

Έστω $p_1, p_2 \in \Pi_{p,u,w}$, $p_1 \neq p_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = p + \lambda_1 u + \mu_1 w, \text{ για } \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R} \\ p_2 = p + \lambda_2 u + \mu_2 w, \text{ για } \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)u + (\mu_2 - \mu_1)w$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα p_1, p_2 είναι η

$$\ell_{p_1, p_2 - p_1} = \{ p_1 + \lambda(p_2 - p_1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Θέλω να δείξω ότι: $\ell_{p_1, p_2 - p_1} \subseteq \Pi_{p,u,w}$

$$\text{Θεωρώ } q \in \ell_{p_1, p_2 - p_1} \Rightarrow q = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)$$

$$q = p_1 + \lambda(p_2 - p_1) = p_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1)u + \lambda(\mu_2 - \mu_1)w = p + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1)u + \lambda(\mu_2 - \mu_1)w$$

$$= p + \lambda_1 u + \mu_1 w + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1)u + \lambda(\mu_2 - \mu_1)w$$

$$= p + \{ \lambda_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1) \} u + \{ \mu_1 + \lambda(\mu_2 - \mu_1) \} w \in \Pi_{p,u,w}$$

Λήμμα

Ορισμός: Δίνονται σημεία $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ διαφορετικά μεταξύ τους. Λέμε ότι το σημείο $p = (x, y, z)$ είναι μεταξύ των p_1, p_2 αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε

$$p = (1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2 = p_1 - \lambda p_1 + \lambda p_2 = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)$$

Γεωμετρική Ισοτιμία Σύνθετος Εσωτερικό Γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: καλούμε (σύνθετος) εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) την απεικόνιση $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

- i. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ii. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
 $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$
 $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- iii. $\langle x, x \rangle \geq 0$
 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Πρόταση (ανισότητα Cauchy-Schwarz): Για τυχόντα $x, y \in \mathbb{R}^3$ ισχύει
 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν x, y είναι γραμ. εξαρτημένα.

Νόρμος: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad x = (x_1, x_2, x_3)$

Ιδιότητες: α) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Απόδειξη: Έστω $x \neq 0, \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\text{Αν } |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Rightarrow \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = 0 \Rightarrow \lambda x + y = 0$$

$$\text{Μήκος: } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x \neq 0, y \neq 0 \quad \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

Ορισμός: καλούμε γωνία των $x, y \in \mathbb{R}^3$ τον μοναδικό αριθμό

$$\phi \in [0, \pi] \text{ ώστε } \cos \phi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Ορισμός: Τα $x, y \in \mathbb{R}^3$ καλούνται ορθογώνια (ορθόθετα, κάθετα)

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Ανισότητα Minkowski (τριγωνική ανισότητα)

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^3$ ισχύει: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Απόδειξη: $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ \langle x, y \rangle \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \begin{cases} \langle x, y \rangle \geq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}_1 \end{cases}$$

Ευκλείδεια απόσταση

Ορισμός: καλούμε απόσταση του σημείου $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$p_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ τον αριθμό

$$d(p_1, p_2) = \|p_1 - p_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Έχω ορίσει μια απόσταση $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$

$$(p, q) \mapsto d(p, q)$$

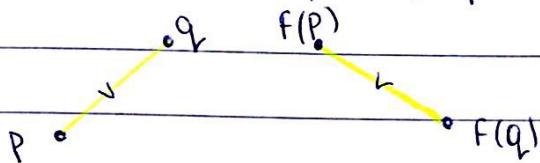
$$\bullet \quad d(p, q) \geq 0$$

$$d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

- $d(p, q) = d(q, p)$
- $d(p, p_3) \leq d(p, p_2) + d(p_2, p_3)$

Ισομετρία

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται Ευκλείδεια ισομετρία αν διατηρεί τις αποστάσεις τυχόντων σημείων, αν δηλαδή ισχύει: $d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3$



Παρατήρηση: Αν f ισομετρία τότε είναι 1-1

Απόδειξη: i) $f(p) = f(q) \Rightarrow d(f(p), f(q)) = 0 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$

ii) Αν f ισομετρία επί, τότε f^{-1} είναι επίσης ισομετρία.

iii) $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$d(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) \stackrel{f \text{ ισομ}}{=} d(f(f^{-1}(p)), f(f^{-1}(q))) = d(p, q)$$

Συμβολισμός: $\text{Isom}(\mathbb{R}^3) = \text{το σύνολο των ισομετριών του } \mathbb{R}^3$

$$\bullet \text{ } Id \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \quad \bullet \quad f, g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow g \circ f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

$$\bullet \quad Tv \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

$$Tv: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Tv(p) = p + v$$

$$d(Tv(p), Tv(q)) = \|Tv(p) - Tv(q)\| = \|(p+v) - (q+v)\| = \|p - q\| = d(p, q)$$

$$d((g \circ f)(p), (g \circ f)(q)) = d(g(f(p)), g(f(q))) \stackrel{g \text{ ισομ}}{=} d(f(p), f(q)) \stackrel{f \text{ ισομ}}{=} d(p, q)$$

Γεωμετρικά ισοτιμία

Ορισμός: Το σχήμα $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται γεωμετρικώς ισοτίμο του σχήματος $\Sigma' \subseteq \mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν υπάρχει $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\Sigma' = f(\Sigma)$